К. А. БОШКАЕВ[1,2,3]*, Э. КЕВЕДО*[2,3,4]*,*

М. Е. АБИШЕВ[1]*, С. ТОКТАРБАЙ*[1]*, Е. К. АЙМУРАТОВ*[1]

([1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан,

[2]Dipartimento di Fisica and ICRA, Universita' di Roma La Sapienza, Piazzale Aldo Moro 5, I-00185 Roma, Italy,

[3]ICRANet, Piazz della Repubblica 10, I-65122 Pescara, Italy,

[4]Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autonoma de Mexico,

AP 70543, Mexico, Distrito Federal 04510, Mexico)

СООТВЕТСТВИЕ МЕТРИК ФОКА И ХАРТЛА-ТОРНА

Аннотация

В работе рассмотрены приближенные решения Фока и Хартла-Торна, которые могут быть использованы для описания гравитационного поля астрофизических компактных объектов в предельном случае медленного вращения и малой деформации. Мы используем метод Фока для получения обобщенного внутреннего решения, а также внешнего решения, которое оказывается эквивалентно внешнему приближенному решению Хартла-Торна. В результате мы получим аналитическое приближенное решение, описывающее внутреннее и внешнее гравитационное поле медленно вращающихся и слегка деформированных астрофизических объектов.

Кілт сөздер: Эйнштейн теңдеулерінің жуық шешімдері, Фок метрикасы, Хартл-Торн метрикасы.

Ключевые слова: приближенные решения уравнений Эйнштейна, метрика Фока, метрика Хартла-Торна.

Keywords: approximate solutions of Einstein's equations, Fock's metric, Hartle-Thorne's metric.

Введение.Метрика Фока [1–3] является постньютоновским приближенным решением урав-нений Эйнштейна, которая применяется для описания геометрии вокруг астрофизического объекта со слабым гравитационным полем и медленным вращением. Данная метрика была получена в общей интегральной форме [1, 2] в разные годы Чандрасекаром (1965) и Абдильдиным (1985). Нетрудно показать, что эти результаты идентичны при соответствующих начальных преобразо-ваниях плотности тела в тензоре энергии и импульса. Хотя именно в работе Абдильдина (1985) метрика Фока была впервые получена для медленно вращающегося сферически-симметричного шара (жидкого и твердого) [2, 4]. Было продемонстрировано, что точное решение уравнений Эйнштейна для вращающегося тела, так называемая метрика Керра [5], в приближении слабых полей и медленных скоростей нетривиальным образом, соответствующими координатными преоб-разованиями, сводится к метрике Фока [2, 4, 6]. Однако до сих пор не удалось найти внутреннее решение Керра, даже в приближенном виде [6]. Данный факт показывает, что метрика Керра мо-жет применяться только для ограниченного класса астрофизических объектов, таких как, например, черные дыры [6]. Цель данной работы – показать, что метрика Хартла-Торна [7, 8], являющаяся приближенным решением уравнений Эйнштейна, которая работает (действительна) в сильных гравитационных полях с умеренными скоростями, совпадает с частным случаем уточненной метрики первого приближения Фока. Решение Хартла-Торна, часто применяется в литературе для описания геометрии вокруг вращающихся деформированных объектов, харак-теризующиеся тремя мультипольными моментами, такими как полная масса, угловой момент, и квадрупольный мо- мент – они позволяют описать реальные астрофизические объекты от плането-подобных небесных тел вплоть до нейтронных звезд. Одной из наиболее важных характеристик этого семейства ре-шений является то, что соответствующие уравнения состояния были построены с использованием реалистичных моделей для внутренней структуры релятивистских звезд. Полу-аналитические и численные обобщения метрики Хартла-Торна с более сложными уравнениями состояния были предложены различными авторами [9]. Наиболее полный обзор этих решений приведен в [10]. Во всех этих случаях, однако, предполагается, что мультипольные моменты (квадрупольные и октупольные) относительно невелики и вращение медленное.

Чтобы сопоставить метрику Фока с метрикой Хартла-Торна, в первой вычисляются интегралы для осе-симметричного деформированного тела, зависящие от внутренней структуры [4, 6, 11, 12]. Впоследствии получаем метрику Фока для медленно вращающегося деформированного тела с тремя параметрами: полная масса, угловой момент, квадрупольный момент. Далее метрика Хартла-Торна записывается в приближении $\sim 1/c^2$ и находятся координатные преобразования между дву-мя метриками. В результате оба внешних решения, записанные в одних и тех же координатах, сопоставляются между собою весьма простыми алгебраическими выражениями.

Структура статьи организована следующим образом. Сначала мы рассмотрим внешнее решение Хартла-Торна и кратко прокомментируем его наиболее важные свойства. Затем мы представим уточненную метрику первого приближения Фока, какой она впервые была получена Абдильдиным [2, 12], в гармонических координатах, а также введем ряд новых координат, которые дают возмож-ность сравнения с другими внешними метриками. Кроме того, мы явно найдем преобразование координат, устанавливающее связь между уточненной метрикой Фока и внешним решением Хартла-Торна.

Метрика Хартла-Торна. С учетом поправок второго порядка малости по угловой скорости, структура компактных объектов может быть приближенно описана с помощью массы, углового момента и квадрупольного момента. Важным следствием этого приближения является то, что уравнения равновесия сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Хартл и Торн [7, 8] исследовали гравитационное поле вращающихся звезд в приближении медленного вращения. Этот формализм можно применить к большинству компактных объектов, в том числе и к пульсарам с миллисекундными периодами вращения, но, согласно [10], он будет показывать «большие» расхождения в случае быстро вращающихся релятивистских объектов вблизи предела массового сброса, т.е. когда угловая скорость объекта достигает угловой скорости частицы по круговой кеплеровой орбите на экваторе звезды. В самом деле, недавно в [13], [14] было показано, что поправки второго порядка для вращения по Хартлу-Торну вполне достаточны для описания свойств звезд с промежуточными скоростями вращения. Эти результаты были обобщены в [15], чтобы включить поправки третьего порядка по угловой скорости. Оказывается, что поправки третьего порядка по угловой скорости не играют существенной роли в определении кеплеровой скорости вращения, однако они важны для изучения момента инерции быстро вращающихся нейтронных звезд.

Дополнительным свойством этого формализма является то, что он может быть использован для сшивания внутренней метрики с приближенной внешней метрикой. В связи с этим стоит отметить, что проблема сшивания внутренних и внешних решений подразумевает многие математические и физические проблемы [16-22], в том числе вычисление метрических функции и координат на поверхности сшивания, а также физическое поведение таких внутренних параметров, как давление и плотность распределения вещества. В следующих подразделах мы представим внутренние и внешние метрики и введем обозначения, которые будут использоваться далее в статье.

Внешнее решение Хартла-Торна. Метрика Хартла-Торна, описывающая внешние поля медленно вращающегося, слегка деформированного объекта, дается как

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \left(1-\frac{2\mathrm{M}}{R}\right)\left[1+2k_1P_2(\cos\Theta)+2\left(1-\frac{2\mathrm{M}}{R}\right)^{-1}\frac{J^2}{R^4}(2\cos^2\Theta-1)\right]dt^2 \\
&-\left(1-\frac{2\mathrm{M}}{R}\right)^{-1}\left[1-2k_2P_2(\cos\Theta)-2\left(1-\frac{2\mathrm{M}}{R}\right)^{-1}\frac{J^2}{R^4}\right]dR^2 \\
&-R^2[1-2k_3P_2(\cos\Theta)](d\Theta^2+\sin^2\Theta d\phi^2)+4\frac{J}{R}\sin^2\Theta dt d\phi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$
k_1=\frac{J^2}{\mathrm{M}R^3}\left(1+\frac{\mathrm{M}}{R}\right)+\frac{5}{8}\frac{Q-J^2/\mathrm{M}}{\mathrm{M}^3}Q_2^2\left(\frac{R}{\mathrm{M}}-1\right),\quad k_2=k_1-\frac{6J^2}{R^4},
$$

$$
k_3=k_1+\frac{J^2}{R^4}+\frac{5}{4}\frac{Q-J^2/\mathrm{M}}{\mathrm{M}^2R}\left(1-\frac{2\mathrm{M}}{R}\right)^{-1/2}Q_2^1\left(\frac{R}{\mathrm{M}}-1\right),
$$

и

$$
Q_2^1(x)=(x^2-1)^{1/2}\left[\frac{3x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3x^2-2}{x^2-1}\right],\; Q_2^2(x)=(x^2-1)\left[\frac{3}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3x^3-5x}{(x^2-1)^2}\right],
$$

присоединенные функции Лежандра второго рода. Константы M, J и Q связаны с полной массой, угловым моментом и квадрупольным моментом вращающегося объекта, соответственно. Этот вид метрики исправляет некоторые опечатки в исходной работе Хартла и Торна [8] (см. также [6] и [23]).

В общем случае данная метрика представляет собой приближенное вакуумное решение, с точностью до второго порядка по угловому моменту J и до первого порядка по квадрупольному моменту Q. В случае обычных звезд, таких как Солнце, в учете гравитационной постоянной G и скорости света c, метрика (1) может быть упрощена из-за малости параметров:

$$\frac{G\mathsf{M}_{Sun}}{c^2\mathsf{R}_{Sun}} \approx 2\times 10^{-6}, \qquad \frac{GJ_{Sun}}{c^3\mathsf{R}_{Sun}^2} \approx 10^{-12}, \qquad \frac{GQ_{Sun}}{c^2\mathsf{R}_{Sun}^3} \approx 10^{-10}. \tag{2}$$

Для этого частного случая можно вычислить соответствующую приближенную метрику из (1) в пределе $c \to \infty$. Расчеты эти просты и приводят метрику к следующему виду

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[1 - \frac{2G\mathsf{M}}{c^2 R} + \frac{2GQ}{c^2 R^3} P_2(\cos\Theta) + \frac{2G^2\mathsf{M}Q}{c^4 R^4} P_2(\cos\Theta)\right] c^2 dt^2 + \frac{4GJ}{c^2 R}\sin^2\Theta dt d\phi \\ &- \left[1 + \frac{2G\mathsf{M}}{c^2 R} - \frac{2GQ}{c^2 R^3} P_2(\cos\Theta)\right] dR^2 - \left[1 - \frac{2GQ}{c^2 R^3} P_2(\cos\Theta)\right] R^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Она описывает гравитационное поле для широкого спектра компактных объектов, и только в случае очень плотных ($GM \sim c^2 R$) или очень быстро вращающиеся ($GJ \sim c^3 R^2$) объектов появляются большие расхождения.

Подход Фока. Для изучения физических свойств решений уравнений Эйнштейна, Фок [11] предложил альтернативный метод, в котором параметры, входящие во внешнюю метрику, полу-чаются с помощью физических моделей для внутренней структуры тела. Этот подход учитывает внутренние свойства гравитационного источника, и сводит задачу нахождения приближенного внутреннего решения к вычислению некоторых интегралов, которые явно зависят от физических характеристик объекта. Таким образом, значимость внешних параметров становится более реалис-тичной и появляется возможность определения некоторых аспектов внутренней структуры объекта с помощью наблюдений, проводимых во внешней области тела. Итак, в этом разделе мы приводим основные результаты данного подхода, вывод частного внутреннего приближенного решения, и изучаем возможность сшивания его с внешним аналогом.

Внутреннее решение. Уточненная метрика первого приближения Фока была получена и иссле-дована Абдильдиным [2, 4, 12] в довольно простой форме. Впервые метрика была написана в первоначальном виде для гармонической системы координат [24, 25] следующим образом:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2G}{c^2} \int \frac{\rho \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) + 3p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (dx')^3 \right] dt^2$$
$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) \left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 \right) + \frac{8}{c^2} \left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3 \right) dt, \quad (4)$$

где c – скорость света в вакууме, G – гравитационная постоянная, U – ньютоновский гравитационный потенциал, ρ – плотность массы тела, v – скорость частицы внутри тела, Π – упругая энергия на единицу массы, p – давление, $\vec{U}$ – гравитационный векторный потенциал. Заметим, что величины ρ, v, Π и U, характеризующие внутреннюю структуру источника, зависят только от «внутренних» координат x_i', которые определяются только внутри тела. Для упрощения обозначе-ний мы опускаем аргументы, которые определяют координаты этой зависимости. Соответст-вующий тензор энергии-импульса задается как

$$T^{00} = \frac{\rho}{c^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U \right) \right], \quad T^{0i} = \frac{\rho}{c^2} v^i, \quad T^{ij} = \frac{1}{c^2} \left(\rho v^i v^j + p \delta^{ij} \right), \quad (5)$$

где δ^{ij} – символ Кронекера и $i, j = 1, 2, 3$. Потенциал Ньютона удовлетворяет уравнению $\Delta U = -4\pi G\rho$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию асимптотической плоскости на бесконечности, может быть записано в виде объемного интеграла:

$$U = G \iiint \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx_1' dx_2' dx_3'. \quad (6)$$

Кроме того, гравитационный векторный потенциал должен непосредственно удовлетворять уравнению $\Delta U_i = -4\pi G\rho v_i$, тогда общее асимптотическое плоское решение может быть представ-лено в виде

$$U_i = G \iiint \frac{\rho v_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx_1' dx_2' dx_3'. \quad (7)$$

Дополнительную информацию об этой метрике можно найти в [3] и [26].

Стоит отметить, что Чандрасекар, используя метод Фока, получил в работе [1] решение, анналогичное (4), что впоследствии было использовано Хартлом и Шарпом в [27]. Тем не менее, не трудно показать, что решение Чандрасекара эквивалентно (4). Действительно, определение плотности

$$\rho = \rho_{Fock} = \rho_{Chandra} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(3U + \frac{v^2}{2} \right) \right] \quad (8)$$

на уровне тензора энергии-импульса позволяет вычислить соответствующие метрические функции, показывающие эквивалентность метрик. Кроме того, в [1] было показано, что решение для стати-ческого случая может быть сопоставлено с известным решением Шварцшильда, специализиро-ванного на случай сферической симметрии и гидростатического равновесия в пост-ньютоновском приближении.

Метрика Фока для деформированного тела. В этом разделе мы рассмотрим случай дефор-мированных объектов, как, например, вращающийся эллипсоид. Очевидно, что если форма тела слегка отклоняется от сферической симметрии, то тело приобретает мультипольные моменты, в частности, квадрупольный момент; моменты более высокого порядка являются незначительными, особенно для медленно вращающегося эллипсоида. Мы теперь обобщим метрику Фока так, чтобы квадрупольный момент мог появиться явно при интегрировании (4) и в ньютоновском потенциале. Следует отметить, что определение внешнего и внутреннего ньютоновских потенциалов для вращающегося эллипсоида является одной из классических проблем как теоретической, так и математической физики. Некоторые примеры для однородного эллипсоида рассмотрены в [28], но самые подробные сведения по этому вопросу были приведены в [29] и совсем недавно в [30]. Что касается внешнего решения, существуют несколько точных решений [6, 31-35] с квадрупольным моментом и параметром вращения, которые могут быть использованы в качестве возможных кандидатов для сшивания с внутренним приближенным решением. Однако в этой работе мы ограничимся лишь изучением приближенной метрики Хартла-Торна.

Рассмотрим уточненную метрику первого приближения Фока (4). Здесь удобно использовать обозначение $x'_1 = x$, $x'_2 = y$, $x'_3 = z$. В общем случае тот факт, что плотность массы $\rho = \rho(x, y, z)$ является функцией координат, не позволяет найти явное выражение для внутреннего ньюто-новского потенциала. Это возможно только путем численного интегрирования. Тем не менее, для случая однородной плотности в литературе существует огромное количество точных решений для вращающихся эллипсоидов. Поскольку здесь рассматривается приближение медленного вращения и слабого поля, мы можем использовать разложение для ньютоновского потенциала вдали от создающих его масс [28, 36] в виде

$$U(r,\theta) = G\iiint \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dxdydz = \frac{Gm}{r} + \frac{GD}{2r^3}P_2(\cos\theta)\,, \tag{9}$$

где m – масса покоя эллипсоида, D – ньютоновский квадрупольный момент, θ – угол между $r'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и осью z. Заметим, что начало координат выбрано в центре инерции масс [28]. Первое слагаемое в выражении выше, является потенциалом сферы, а второе – отвечает за отклонение от сферической симметрии. Если взять ось z в качестве оси вращения, то масса покоя и квадрупольный момент определяются как

$$m = \iiint \rho dxdydz\,, \tag{10}$$

$$D = \iiint \rho(2z^2 - x^2 - y^2)dxdydz. \tag{11}$$

Используя ту же процедуру, можно записать интеграл в метрике Фока следующим образом

$$\iiint \frac{\rho\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right) + 3p}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dxdydz = \frac{\zeta}{r} + \frac{\mathsf{D}}{2r^3}P_2(\cos\theta), \tag{12}$$

где

$$\zeta = \iiint \left[\rho \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) + 3p \right] dxdydz \, , \tag{13}$$

$$\mathsf{D} = \iiint \left[\rho \left(\frac{3}{2} v^2 + \Pi - U \right) + 3p \right] (2z^2 - x^2 - y^2) dxdydz \, . \tag{14}$$

Величина D/c^2 является релятивистской поправкой к ньютоновскому квадрупольному мо-менту D, т.е. квадрупольным моментом, возникающим из-за вращения. Для вычисления интегралов воспользуемся соотношением для сжимаемой упругой среды [11]:

$$\rho\Pi - \rho U + p = \rho W \, , \tag{15}$$

здесь W есть потенциал центробежных сил определяемый как

$$W = \frac{(x^2 + y^2)}{2} \Omega^2 \, , \tag{16}$$

где для твердотельного вращения угловая скорость тела $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$ имеет одну компоненту вдоль оси z, и тогда $v^2=2W$. Принимая во внимание эти выражения, вышеуказанные интегралы сводятся к простой форме

$$\zeta = 2\iiint [2\rho W + p] dxdydz \, , \tag{17}$$

$$\mathsf{D} = 2\iiint [2\rho W + p](2z^2 - x^2 - y^2) dxdydz \, . \tag{18}$$

Более того, для вычисления этих интегралов рассмотрим следующие два случая, определяющие внутреннюю структуру тела:

1) жидкое тело с последующим уравнением внутреннего движения [11]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} (U + W) = \frac{\partial p}{\partial x_i} \, . \tag{19}$$

2) абсолютно твердое тело с уравнением внутреннего движения [37]:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \, . \tag{20}$$

Это уравнения гидростатического равновесия, которые были приняты Фоком [11] и Брум-бергом [37] для описания внутренней структуры объекта. Мы же ограничимся рассмотрением тех случаев, когда тело вращается как целое, в виде твердого тела. Тогда для жидкого и твердого тел кинетическая энергия вращения имеет следующий вид

$$K = \iiint \rho W dxdydz = \frac{I_{zz}\Omega^2}{2} \, , \tag{21}$$

где I_{zz} – главный момент инерции эллипсоида вдоль оси z. Давление может быть выражено как

$$\iiint p\,dxdydz = \begin{cases} \frac{1}{3}(\varepsilon - 2K), & \text{для жидкого тела,} \\ \frac{1}{3}\varepsilon, & \text{для твердого тела,} \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\iiint \rho U\,dxdydz, \tag{23}$$

представляет собой отрицательную энергию взаимного притяжения частиц тела с обратным знаком.

Вторые моменты кинетической энергии

$$K_{ik} = \iiint \rho W x_i' x_k' dxdydz, \tag{24}$$

могут быть вычислены с помощью приведенных выше выражений. Тогда для вторых моментов давления получаем

$$\iiint p x_i' x_k' dxdydz = \begin{cases} \frac{1}{2}\chi_{ik} - \frac{2}{5}K_{ik}, & \text{для жидкого тела,} \\ -\frac{1}{2}K_{ik}, & \text{для твердого тела,} \end{cases} \tag{25}$$

где (более подробную информацию можно найти в [12])

$$\chi_{ik} = -\frac{2}{5}\iiint \rho x_i' x_k' x_j' \frac{\partial U}{\partial x_j'} dxdydz. \tag{26}$$

После вычисления всех интегралов получаем

$$\zeta = \begin{cases} \frac{8}{3}K + \frac{2}{3}\varepsilon, & \text{для жидкого тела,} \\ 4K + \frac{2}{3}\varepsilon, & \text{для твердого тела,} \end{cases} \tag{27}$$

$$\mathrm{D} = \begin{cases} \frac{28}{5}\frac{\kappa_L S_0^2}{I_{zz}^2}\iiint \rho(x^2+y^2)(z^2-x^2)dxdydz - \frac{4}{5}\iiint \rho(z^2-x^2)x_j'\frac{\partial U}{\partial x_j'}dxdydz, & \text{жидкое тело,} \\ \frac{28}{5}\frac{\kappa_S S_0^2}{I_{zz}^2}\iiint \rho(x^2+y^2)(z^2-x^2)dxdydz, & \text{твердое тело,} \end{cases}$$

(28)

где S_0 угловой момент тела, который находится из

$$\vec{S}_0 = I_{zz}\vec{\Omega}, \tag{29}$$

и численные множители соответственно равны

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_L = \dfrac{4}{7}, & \textit{для жидкого тела}, \\ \kappa_S = \dfrac{15}{28}, & \textit{для твердого тела}. \end{cases} \tag{30}$$

В отличие от ньютоновского скалярного потенциала, векторный потенциал может быть легко вычислен из

$$\vec{U} = \frac{G}{2r^3}\left[\vec{S}_0 \times \vec{r}\right]. \tag{31}$$

Введя эффективную (общую) массу

$$M = m + \frac{\zeta}{c^2}, \tag{32}$$

для метрики Фока мы получим следующее выражение

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[c^2 - 2\left(\frac{GM}{r} + \frac{GD}{2r^3}P_2(\cos\theta)\right) + \frac{2}{c^2}\left(\frac{GM}{r} + \frac{GD}{2r^3}P_2(\cos\theta)\right)^2 - \frac{G\mathsf{D}}{c^2 r^3}P_2(\cos\theta)\right]dt^2 \\ &-\left[1 + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GD}{c^2 r^3}P_2(\cos\theta)\right]\left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] + \frac{4GS_0}{c^2 r}\sin^2\theta d\phi dt\,, \end{aligned} \tag{33}$$

в гармонических координатах. Для записи метрики в Шварцшильдо-подобных (стандартных) сферических координатах следует использовать преобразования

$$r \to R - \frac{GM}{c^2}, \quad \theta \to \Theta, \tag{34}$$

которые преобразуют метрику (33) в

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[c^2 - \frac{2GM}{R} - \left(D + \frac{\mathsf{D}}{c^2}\right)\frac{G}{R^3}P_2(\cos\Theta) - \frac{G^2DM}{c^2R^4}P_2(\cos\Theta)\right]dt^2 + \frac{4GS_0}{c^2R}\sin^2\Theta d\phi dt \\ &-\left[1 + \frac{2GM}{c^2R} + \frac{GD}{c^2R^3}P_2(\cos\Theta)\right]dR^2 - \left[1 + \frac{GD}{c^2R^3}P_2(\cos\Theta)\right]R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)\,, \end{aligned} \tag{35}$$

где мы пренебрегли квадратичными членами по квадрупольному моменту D. В предельном случае с нулевым вращением S_0 = 0 и исчезающими квадрупольными моментами $D = \mathsf{D} = 0$, эта метрика представляет приближенное решение Шварцшильда.

Исследование метрики (33) показывает, что при грубом приближении, когда вращение медленное $S_0 \neq 0$, но при этом тело обладает сферической симметрией, данная метрика сводится к приближенной метрике Фока рассмотренной в [2, 12] с полной массой M, и

$$D = 0, \quad \mathsf{D} = -\frac{2\kappa S_0^2}{M}. \tag{36}$$

Следует отметить, что аналогичный результат был получен Лаараккерсом и Пуассоном [38]. Они численно вычислили скалярный квадрупольный момент Q вращающихся нейтронных звезд для нескольких уравнений состояния, и обнаружили, что при фиксированной гравитационной массе M, квадрупольный момент дается простым квадратичным фитингом

$$\mathsf{Q} = -\alpha \frac{J^2}{Mc^2}, \tag{37}$$

где J – угловой момент звезды и α – безразмерная величина, зависящая от уравнений состояния. Следует обратить внимание, что скалярный квадрупольный момент Q Лааракерса и Пуассона связан с квадрупольным моментом Хартла и Торна следующим образом

$$\mathsf{Q} = -Q \tag{38}$$

Вышепоказанный квадратичный фитинг воспроизводит Q с поразительной точностью. Вели-чина α колеблется от $\alpha \approx 2$ для очень мягкого уравнения состояния и до $\alpha \approx 7.4$ для очень жесткого уравнения состояния. Этот результат значительно отличается от черной дыры Керра, для которого $\kappa = \alpha = 1$ (см. [2, 4, 6]). Недавно результаты работы [38], были модифицированы с учетом правиль-ного определения мультипольных моментов [18]. Поэтому значение параметра α в численном фитинге (37) слегка отличается от приведенного в [38]. В нашем случае, есть похожие, но не оди-наковые результаты, так как решение Фока недействительно в пределе сильных гравитационных полей (например, нейтронных звезд) и быстрых вращений. Значения для постоянной κ получаются из качественного анализа в пределе слабого поля и медленного вращения. Для того чтобы найти точные значения к, необходимо задать уравнение состояния и выполнить численное интегриро-вание. Эта задача, однако, выходит за рамки настоящей работы.

И, наконец, покажем, что внешняя уточненная метрика Фока соответствует внешней метрике Хартла-Торна. Чтобы убедиться в этом, необходимо рассмотреть внешнее решение (35), написанное в тех же координатах, как и внешнее решение (3); это приводит к следующим алгебраическим соотношениям

$$\mathsf{M} = M, \qquad J = S_0, \qquad Q = -\frac{1}{2}\left(D + \frac{\mathsf{D}}{c^2}\right). \tag{39}$$

Заключение. В данной работе мы изучили гравитационное поле медленно вращающихся, слег-ка деформированных астрофизических компактных объектов. Были рассмотрены приближенные решения уравнений Эйнштейна, которые могут быть использованы для описания внутреннего и внешнего гравитационных полей. В частности, был применен метод, предложенный Хартлом и Торном, для нахождения внутреннего и внешнего приближенных решений, и метод, предложен-ный Фоком. Мы вывели внешнюю уточненную метрику Фока, учитывающую вклад квадруполь-ного параметра до первого порядка, который описывает отклонение тела от сферической сим-метрии. Специфический параметр κ, который входит в уточненную метрику Фока, впоследствии принимает особые значения в случае жидкой и твердой сфер. Выяснилось также, что в случае приближенной метрики Керра, этот параметр не соответствует ни одной из известных внутренних моделей тела проанализированных в рамках формализма Фока.

Чтобы избежать технических проблем, которые обычно возникают в процессе сопоставления решений [21], мы использовали тот же набор координат внутри и снаружи тела. В случаях, пред-ставленных здесь, это может быть сделано относительно простым способом только потому, что все преобразования координат рассчитываются не точно, а с тем же приближением, что и метрические функции. Такой подход позволяет сократить соответствующие проблемы в сопоставлении метрик на соответствующей поверхности: таким образом, появляются только алгебраические условия. Используя этот метод, мы могли показать, что приближенная метрика Керра не может быть сопоставлена с внутренним решением Фока.

С учетом последних работ по белым карликам [40–42] и нейтронным звездам [43], было бы интересно вычислить квадрупольный момент для этих объектов и выполнить анализы работ Лаараккерса и Пуассона [38], Паппаса и Апостолатоса [18]. Из наших предварительных резуль-татов мы ожидаем, что квадрупольный момент для вращающихся белых карликов и нейтронных звезд будет больше, чем квадрупольный момент Керра $Q=J^2/M$. С этой целью целесообразно использовать метрику Хартла-Торна, так как она обладает как внутренним, так и внешним решениями в отличие от других точных решений, кроме того, она работает в режиме сильных гравитационных полей, в то время как метрика Фока работает только в режиме слабых полей.

ЛИТЕРАТУРА

1 Chandrasekhar S. // Astrophys. J. 142, 1488 (1965).

2 Абдильдин М.М. Вопросы теории поля / Под ред. С. Е. Ерматова. – Алма-Ата: Қазақ университеті, 1985. – С. 20-25.

3 Abdildin M.M., Abishev M. E., Beissen N.A., Boshkaev K.A. // Gravit. Cosmology. 15, 1 (2009)

4 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ университеті, 2006.

5 Kerr R.P. // Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).

6 Boshkayev K., Quevedo H., Ruffini R. // Physical Review D 86, 064043 (2012)

7 Hartle J.B. // Astrophys. J. 150, 1005 (1967).

8 Hartle J.B., Thorne K.S. // Astrophys. J. 153, 807 (1968).

9 Andersson N., Comer G. L. // Classical Quantum Gravity 18, 969 (2001).

10 Stergioulas N. // Living Rev. Relativity 6, 3 (2003).

11 Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М, 1961.

12 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата: Наука, 1988.

13 Berti E., Stergioulas N. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 350, 1416 (2004).

14 Berti E., White F., Maniopoulou A., Bruni M. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 358, 923 (2005).

15 Benhar O., Ferrari V., Gualtieri L., Marassi S. // Phys. Rev. D 72, 044028 (2005).

16 Pappas G., Apostolatos T.A. // Classical Quantum Gravity 25, 228002 (2008).

17 Pappas G. // J. Phys. Conf. Ser. 189, 012028 (2009).

18 Pappas G., Apostolatos T.A. // Phys. Rev. Lett. 108, 231104 (2012).

19 Pappas G. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 422, 2581 (2012).

20 Pachon L.A., Rueda J.A., Valenzuela-Toledo C.A. // Astrophys. J. 756, 82 (2012).

21 Quevedo H. Proceedings of the 12th M-G Meeting on GR. – Paris, 2009 / Ed. by T. Damour, R. T. Jantzen, and R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2012); arXiv:1205.0500.

22 Thorne K.S. // In Houtes Energies en Astrophysique / Edited by C. DeWitt, E. Schatzman, and P. Veron (Gordon and Breach, New York, 1967), Vol. 239.

23 Bini D., Geralico A., Quevedo H. // Classical Quantum Gravity 26, 225006 (2009).

24 Donder T. De. La Gravifique Einsteinienne. – Paris: Gauthier-Villars, 1921.

25 Lanczos C. // Phys. Z. 23, 537 (1923).

26 Abdildin M.M., Abishev M. E., Beissen N.A., Brisheva Zh.N. // Gravit Cosmol. 15, 141 (2009).

27 Hartle J. B., Sharp D.H. // Astrophys. J. 147, 317 (1967)

28 Landau L.D., Lifshitz E.M. Classical Theory of Fields. – Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.

29 Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. – Yale Univ. Pr., New Haven, CT, 1967.

30 Meinel R., Ansorg M., Kleinwachter A., Neugebauer G., Petroff D. Relativistic Figures of Equilibrium. – Cambridge, England: Cambridge University Press, 2008.

31 Manko V.S. // Classical Quantum Gravity 7, L209 (1990).

32 Manko V.S., Mielke E.W., Sanabria-Gomez J.D. // Phys. Rev. D 61, 081501(R) (2000).

33 Quevedo H., Mashhoon B. // Phys. Lett.A109, 13 (1985).

34 Quevedo H., Mashhoon B. // Phys. Rev. D 43, 3902 (1991).

35 Quevedo H. // Phys. Rev. D 33, 324 (1986).

36 Lanza A.F., Rodono M. // Astron. Astrophys. 349, 887 (1999).

37 Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М., 1972.

38 Laarakkers W.G., Poisson E. // Astrophys. J. 512, 282 (1999).

39 Thorne K.S. // Rev. Mod. Phys. 52, 299 (1980).

40 Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., S.-S. Xue. // Phys. Rev. C, 83(4) (2011).

41 Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., S.-S. Xue. // Phys. Rev. D, 84(8) (2011).

42 Boshkayev K., Rueda J. A., Ruffini R., Siutsou I..// ApJ. 762, 117 (2013).

43 Belvedere R., Pugliese D., Rueda J. A., Ruffini R., S.-S. Xue // Nuclear Ph. A, 883:1–24, 2012.

REFERENCES

1. Chandrasekhar S., *Astrophys*. J. 142, 1488 (1965).

2. Abdildin M.M., Voprosy *teorii polya, pod redakciei S.E. Yermatova* (Qazaq Universiteti, Alma-Ata, **1985**) str. 20–25. (in Russ).

3. Abdildin M.M., Abishev M. E., Beissen N.A., and Boshkaev K.A., *Gravit. Cosmology* 15, 1 (**2009**)

4. Abdil'din M.M., *Problema dvizhenija tel v obshhej teorii otnositel'nosti* (Qazaq Universiteti, Almaty, 2006). (in Russ).

5. Kerr R.P., *Phys. Rev*. Lett. 11, 237 (**1963**).

6. Boshkayev K., Quevedo H., Ruffini R., *Physical Review* D 86, 064043 (**2012**)

7. Hartle J.B., *Astrophys*. J. 150, 1005 (**1967**).

8. Hartle J.B. and Thorne K.S., *Astrophys*. J. 153, 807 (**1968**).

9. Andersson N. and Comer G. L., *Classical Quantum Gravity* 18, 969 (**2001**).

10. Stergioulas N., *Living Rev. Relativity* 6, 3 (**2003**).

11. Fok V.A., *Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija* (M, **1961**). (in Russ).

12. Abdil'din M.M., *Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna* (Nauka, Alma-Ata, **1988**). (in Russ).

13. Berti E.and Stergioulas N., Mon. Not. R. *Astron*. Soc. 350, 1416 (**2004**).

14. Berti E., White F., Maniopoulou A., and Bruni M., Mon. Not. R. *Astron*. Soc. 358, 923 (**2005**).

15. Benhar O., Ferrari V., Gualtieri L., and Marassi S., *Phys. Rev*. D 72, 044028 (**2005**).

16. Pappas G.and Apostolatos T.A., *Classical Quantum Gravity* 25, 228002 (**2008**).

17. Pappas G., J. *Phys. Conf.* Ser. 189, 012028 (**2009**).

18. Pappas G.and Apostolatos T.A., *Phys. Rev*. Lett. 108, 231104 (**2012**).

19. Pappas G., Mon. Not. R. *Astron*. Soc. 422, 2581 (**2012**).

20. Pachon L.A., Rueda J.A., and Valenzuela-Toledo C.A., *Astrophys*. J. 756, 82 (**2012**).

21. Quevedo H., *Proceedings of the 12th M-G Meeting on GR*, Paris, 2009, ed. by T. Damour, R. T. Jantzen, and R. Ruffini (World Scientific, Singapore, **2012**); arXiv:1205.0500.

22. Thorne K.S., *in Houtes Energies en Astrophysique*, edited by C. DeWitt, E. Schatzman, and P. Veron (Gordon and Breach, New York, **1967**), Vol. 239.

23. Bini D., Geralico A., and Quevedo H., *Classical Quantum Gravity* 26, 225006 (**2009**).

24. Donder T. De, *La Gravifique Einsteinienne* (Gauthier-Villars, Paris, **1921**).

25. Lanczos C., *Phys*. Z. 23, 537 (**1923**).

26. Abdildin M.M., Abishev M. E., Beissen N.A., Brisheva Zh.N., *Gravit Cosmol*. 15, 141 (**2009**).

27. Hartle J. B. and Sharp D.H., *Astrophys*. J. 147, 317 (**1967**)

28. Landau L.D., Lifshitz E.M., *Classical Theory of Fields* (Addison-Wesley, Reading, MA, **1962**).

29. Chandrasekhar S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale Univ. Pr., New Haven, CT, **1967**).

30. Meinel R., Ansorg M., Kleinwachter A., Neugebauer G., and Petroff D., *Relativistic Figures of Equilibrium* (Cambridge University Press, Cambridge, England, **2008**).

31. Manko V.S., *Classical Quantum Gravity* 7, L209 (**1990**).

32. Manko V.S., Mielke E.W., and Sanabria-Gomez J.D., *Phys. Rev*. D 61, 081501(R) (**2000**).

33. Quevedo H. and Mashhoon B., *Phys.* Lett.A109, 13 (**1985**).

34. Quevedo H. and Mashhoon B., *Phys. Re*v. D 43, 3902 (**1991**).

35. Quevedo H., *Phys. Rev*. D 33, 324 (**1986**).

36. Lanza A.F., and Rodono M., *Astron. Astrophys*. 349, 887 (**1999**).

37. Brumberg V.A., *Reljativistskaja nebesnaja mehanika* (M, **1972**). (in Russ)..

38. Laarakkers W.G. and Poisson E., *Astrophys*. J. 512, 282 (**1999**).

39. Thorne K.S., Rev. *Mod. Phys*. 52, 299 (**1980**).

40. Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., and S.-S. Xue. *Phys. Rev*. C, 83(4) (**2011**).

41. Rotondo M., Rueda J. A., Ruffini R., and S.-S. Xue. *Phys. Rev*. D, 84(8) (**2011**).

42. Boshkayev K., Rueda J. A., Ruffini R., and Siutsou I. *ApJ*, 762, 117 (**2013**).

43. Belvedere R., Pugliese D., Rueda J. A., Ruffini R., and S.-S. Xue. *Nuclear Ph.* A, 883:1–24, **2012**.

Резюме

К. А. Бошкаев[1,2,3], Э. Кеведо[2,3,4], М. Е. Абишев[1], С. Токтарбай[1], Е. К. Аймуратов[1]

([1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,

[2]Dipartimento di Fisica and ICRA, Universita' di Roma La Sapienza, Piazzale Aldo Moro 5, I-00185 Roma, Italy,

[3]ICRANet, Piazz della Repubblica 10, I-65122 Pescara, Italy,

[4]Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autonoma de Mexico,

AP 70543, Mexico, Distrito Federal 04510, Mexico)

ФОК ЖӘНЕ ХАРТЛ-ТОРН МЕТРИКАЛАРЫНЫҢ СӘЙКЕС БОЛУЫ

Жұмыста Фок және Хартл-Торн шешімдері қарастырылады. Бұл шешімдер баяу айналатын және сәл деформацияланған астрофизикалық компакт объектілердің гравитациялық өрісін сипаттау үшін пайдала-нылады. Жалпыланған ішкі және сыртқы шешімдерді алу үшін Фок әдістері қолданылады. Фок әдісімен алынған сыртқы шешім Хартл-Торнның жуық сыртқы шешіміне пара-пар екені көрсетіледі. Нәтижесінде баяу айналатын және сәл деформацияланған астрофизикалық компакт объектілердің гравитациялық өрісін сипаттайтын аналитикалық жуық шешім алынды.

Кілт сөздер: Эйнштейн теңдеулерінің жуық шешімдері, Фок метрикасы, Хартл-Торн метрикасы.

Summary

K. A. Boshkayev[1,2,3],H. Quevedo[2,3,4], M. E. Abishev[1], S. Toktarbay[1], Y. K. Aimuratov[1]

([1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,

[2]Dipartimento di Fisica and ICRA, Universita' di Roma La Sapienza, Piazzale Aldo Moro 5, I-00185 Roma, Italy,

[3]ICRANet, Piazz della Repubblica 10, I-65122 Pescara, Italy,

[4]Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autonoma de Mexico,

AP 70543, Mexico, Distrito Federal 04510, Mexico)

CORRESPONDENCE OF FOCK AND HARTLE-THORNE METRICS

In this work the approximate solutions of Fock and Hartle-Thorne are studied in the limiting case of weak gravitational field, slow rotation and slight deformation. The Fock method is used to derive a generalized interior solution, and also an exterior solution that turns out to be equivalent to the exterior Hartle-Thorne approximate solution. As a result an analytic approximate solution is obtained that describes the interior and exterior gravitational field of a slowly rotating and slightly deformed astrophysical object.

Keywords: approximate solutions of Einstein's equations, Fock's metric, Hartle-Thorne's metric.

Поступила 5.07.2013г.